I numeri

Le strutture numeriche e i loro usi

Scheda **2**

La struttura dei numeri reali e altre strutture numeriche

1. I numeri reali

I numeri interi costituiscono un modello matematico impiegato per misurare o individuare lo stato di fenomeni che variano a scatti. Ad esempio per individuare i piani di un edificio assumendo come riferimento il piano terra (→ *figura 1*, pulsantiera di un ascensore).

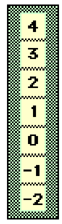


figura 1

Esaminiamo ora un fenomeno che varia con continuità. Ad esempio il *trascorrere del* ***tempo***
Considero un recipiente pieno d'acqua con un piccolo foro sul fondo da cui escano gocce; l'acqua sia mantenuta allo stesso livello da un rubinetto controllato da un galleggiante, in modo che le gocce escano con frequenza costante, cioè passi sempre lo stesso tempo tra la caduta di una goccia e la caduta della goccia successiva. Il livello dell'acqua e la dimensione del foro siano tali che cada una goccia ogni secondo.

Suppongo che ogni goccia che cade faccia avanzare di una posizione un contatore meccanico. Il contatore passa da …000 a …001, …002, …003, … . Se azzero questo *contasecondi* quando inizia un certo fenomeno e se quando questo termina il contatore segna, ad esempio, 138 dirò che il fenomeno è durato 138 secondi (→ *figura 2*).

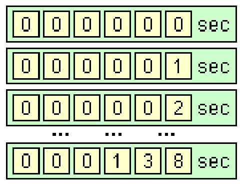


figura 2

Questo numero è una ***misura*** del tempo trascorso. Non rappresenta tuttavia esattamente la durata del fenomeno:

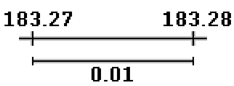
- quando azzero il contatore la goccia uscita per ultima dal foro ha già percorso un po' di strada; impiega quindi meno di 1 secondo a completare la caduta e a far scattare il contatore sulla posizione 1; perciò quando il contatore scatta a 138 in realtà è trascorso un tempo compreso tra 137 e 138 secondi;
- d'altra parte se il fenomeno finisce quando il contatore, pur segnando ancora 138, sta per scattare a 139, il tempo trascorso potrebbe essere di quasi 139 secondi.

In definitiva posso concludere solamente che il tempo trascorso è compreso tra 137 e 139 secondi. Dirò che 138 secondi è una misura ***approssimata*** della durata del fenomeno considerato, e che il valore vero della misura può discostarsi da essa di 1 secondo in più o in meno. In breve scrivo: durata = 138±1 sec (o 138 ± 1 s, come si usa in "fisica").

Suppongo di modificare il nostro ipotetico *cronometro ad acqua*: allargo il foro e aumento il livello dell'acqua in modo che le gocce escano più velocemente, esattamente 10 gocce al secondo. Aggiungo una ruota dentata sulla destra del contatore e scrivo preceduta da un punto la cifra ad essa corrispondente. Il contatore passerà da …000.0 a …000.1, …000.2, …. Suppongo che con il nuovo apparato "misuratore" il fenomeno considerato termini quando il numero segnato è 138.2.
138.2 sec è una misura della durata del fenomeno *più precisa* della precedente. Viene letta "138 punto 2 secondi" o "138 secondi e 2 decimi di secondo"; infatti l'intervallo di tempo che deve ripetersi 10 volte per fare 1 sec viene detto *decimo* di secondo.
Tuttavia anche questa misura non è esatta. Con un ragionamento analogo al precedente posso concludere che vi può essere un *errore* di un decimo di secondo: durata = 138.2±0.1 sec.

Ogni cronometro si basa sul ripetersi con frequenza costante di un certo evento (la caduta di una goccia, il pendolo che passa per la verticale, la molla che passa per la posizione di riposo, l'oscillazione di un cristallo di quarzo eccitato elettricamente, …). Chiamo ***tic*** questi eventi. Nei cronometri moderni, che si basano in genere sull'oscillazione di cristalli di quarzo, il numero visualizzato non scatta ad ogni tic, come accade nei modelli di cronometro sopra visti, ma tra uno scatto e il successivo intercorrono molti più tic. In questo modo diventa trascurabile il conteggio di un tic in più o in meno.
Ad esempio se vengono visualizzati i centesimi di secondo e vi sono 8000 tic al secondo, un tic in più o in meno corrisponde a una variazione di 1/8000 = 0.000125 sec, che è trascurabile rispetto a 0.01 sec.

Dunque *posso ritenere che un moderno cronometro che segni i centesimi di secondo visualizzi esattamente il numero dei centesimi di secondo trascorsi tra quando è stato fatto partire e quando è stato arrestato.*



Non ottengo tuttavia il valore esatto del tempo trascorso, ma solo il suo *troncamento* ai centesimi di secondo. Nel caso in cui venga visualizzata la misura 183.27 sec, posso solo concludere che la misura esatta è compresa tra 183.27 sec e 183.28 sec, ovvero dire che 183.27 sec la approssima per difetto a meno di un errore di 0.01 sec. Con strumenti più precisi potrei arrivare all'intervallo [138.273, 138.274], e così via.

Però *più di tanto non posso migliorare la misurazione*: prima o poi arrivo ai limiti delle nostre possibilità tecnologiche (eventi utilizzabili come tic, dispositivi impiegabili per il conteggio, …).

A ciò è da aggiungere il fatto che *non è possibile avviare e arrestare il cronometro esattamente all'inizio e alla fine del fenomeno.* Se impiego un cronometro che mi consente di arrivare alla misura 138.27 sec (troncata ai centesimi di secondo), non è detto che la cifra 7 sia significativa. Se faccio partire il cronometro con un ritardo di circa 15 centesimi di secondo e lo arresto con circa 37 centesimi di secondo di ritardo, la misura risulta essere allungata di un intervallo di tempo pari a circa 37−15=22 centesimi di secondo: la misura corretta è quindi circa 138.05 secondi. L'errore introdotto dall'utente (22 centesimi di secondo) supera quello dello strumento (1 centesimo di secondo). [➔ quesito e8 della scheda 3 di *Le statistiche*]. La *misura esatta* della durata che sto considerando potrebbe essere, in secondi, 138.27356018… e così via con infinite altre cifre, ma *non potrò mai conoscerla completamente.*

Per misurare ***lunghezze*** procedo in modo simile. Prendo un nastro metallico su cui fisso una *tacca* 0 e, alla distanza di 1 metro, la tacca 1; riportando successivamente 1 metro posso segnare le tacche 2, 3, …. Con questo nastro misuratore posso effettuare misure approssimate al metro.

Per esempio posso stendere il nastro a fianco ad un'asta con la tacca 0 a una estremità dell'asta; se all'altra estremità corrisponde una tacca compresa tra 2 e 3 possiamo concludere che l'asta misura 2 m. È una misura approssimata per difetto (troncata), con errore al più di 1 metro.

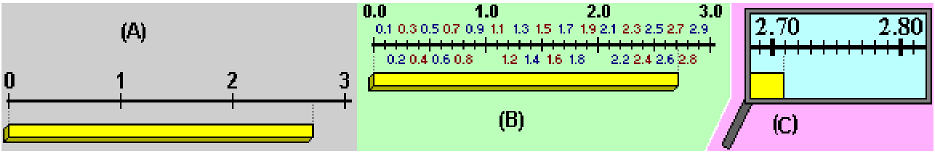


figura 3 (clicca per ingrandire)

Posso poi suddividere ogni *divisione,* cioè ogni parte di nastro compresa tra due tacche, ad esempio tra la tacca 0 e la tacca 1, in 10 parti uguali. In corrispondenza delle vecchie tacche posso aggiungere ".0" (0 → 0.0, 1 → 1.0, 2 → 2.0, 3 → 3.0); in corrispondenza delle nuove tacche scriverò 0.1, 0.2, …, 0.9, 1.1, 1.2, ….

Con ulteriori suddivisioni potrei migliorare la misura, ma mai arrivare alla misura esatta. Del resto le estremità dell'asta non sono perfettamente lisce, nonostante ciò che può apparire a prima vista o al tatto. Con una lente potente o con un microscopio (→ *figura 4*) si possono osservare piccoli rilievi, ad esempio di qualche decimo di millimetro. Arrivati alla misura 2.708 (2 m, 7 dm, 8 mm) non ha senso procedere oltre. D'altra parte, come nel caso della misura del tempo, occorre tener conto anche degli errori (cioè delle variazioni rispetto alla misura corretta) che introduce chi misura:

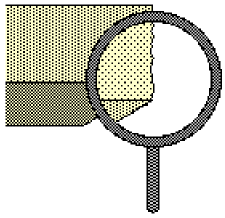


figura 4

nel posizionare il nastro misuratore non è possibile far corrispondere esattamente la tacca 0 alla prima estremità dell'asta, nel leggere la misura vi può essere qualche incertezza nel determinare la tacca corrispondente alla fine dell'asta, … (➔ *animazione*)

I ***numeri reali*** (o, più semplicemente, numeri) sono i modelli matematici impiegati per rappresentare le misure esatte. Come abbiamo visto si tratta di un modello ***astratto***: con una misurazione non è possibile determinare con infinite cifre il valore di una grandezza Tuttavia il suo uso ci consente di fare ragionamenti più semplici, senza tener conto delle limitazioni delle misure. Ci consente di parlare di:

− tempi uguali (senza misure esatte come potremmo dire che due fenomeni hanno la stessa durata?),
− rettangoli (come potremmo dire che quattro angoli hanno la stessa ampiezza?),
− sfere (come potremmo dire che un oggetto, comunque lo si posizioni, ha sempre lo stesso spessore?),
− ...

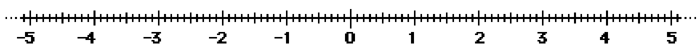
Nei *casi pratici*, naturalmente, dovrò poi tenere conto di queste astrazioni.

Nota Con una misurazione non si possono trovare tutte le cifre che esprimono il valore di una grandezza. Tuttavia vi sono grandezze di cui si conosce la misura esatta. Si tratta di grandezze il cui valore viene assegnato convenzionalmente: ad esempio si assumono come misura della temperatura dell'acqua in ebollizione al livello del mare (cioè alla pressione di 1 atmosfera) il valore 100.000…°C e come misura della temperatura dell'acqua che sta solidificandosi al livello del mare il valore 0.000…°C.

Si possono, poi, conoscere esattamente le misure di grandezze che possono dedursi con calcoli matematici da altre misure esatte. Ad esempio possiamo dire che un quadrato che abbia lato lungo esattamente 2.4 cm ha area pari esattamente a $2.4^2 = 5.76$ cm^2.

2. La retta dei numeri

I numeri vengono spesso rappresentati disposti lungo una linea retta, che posso immaginare come l'unione di due nastri misuratori senza spessore e senza fine, disposti su direzioni opposte e con la tacca 0 in comune. Il nastro destro rappresenta i numeri positivi, il nastro sinistro quelli negativi. Questa linea viene chiamata ***retta (o linea) dei numeri****.*



Naturalmente questa linea non è da intendere come una linea del tipo di quelle che si possono tracciare con una penna o con un altro oggetto. Le linee della "realtà" hanno sempre uno spessore e, prima o poi, se non ritornano su se stesse (come nel caso di una circonferenza), finiscono.

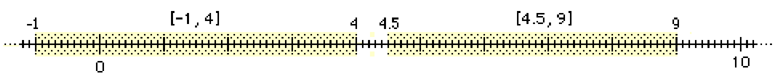
Questa invece, anche se nel tracciarla sulla carta le dò un certo spessore e una lunghezza limitata, è una linea che immagino infinitamente sottile e che si sviluppi senza fine in entrambe le direzioni.

Suppongo inoltre che, comunque si prendano su di essa due punti distinti, si possano prendere tra essi quanti altri punti si vogliono. Nelle linee della "realtà" invece prima o poi i punti andrebbero a sovrapporsi, così come nei nastri misuratori usati nella pratica le tacche non si possono infittire più di tanto.

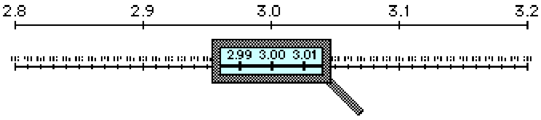
In altre parole, sono di fronte a un modello matematico astratto. Quando parlerò di ***punto*** della retta dei numeri non intenderò un punto tracciabile "concretamente", che ha sempre qualche dimensione, ma una ***posizione*** sulla retta dei numeri, che può essere *individuata esattamente con un numero reale.*

La retta dei numeri illustra in forma schematica l'uso dei numeri reali per rappresentare grandezze fisiche. Non è altro che una generalizzazione delle usuali scale graduate impiegate negli strumenti di misura.

Mentre sulla scala termometrica dico che tra 6° e 11° o tra -1° e 4° vi è una differenza di 5°, sulla retta dei numeri dirò che tra il punto 6 e il punto 11 o tra il punto -1 e il punto 4 vi è la *distanza* 5 (senza unità di misura). Dirò anche che l'intervallo [6, 11], cioè l'insieme dei punti compresi tra 6 e 11, e l'intervallo [−1, 4] hanno *lunghezza* o *ampiezza* 5. Analogamente l'intervallo [4.5, 9] ha ampiezza 4.5 (➔ Le statistiche-3).



In corrispondenza delle tacche, cioè dei punti che delimitano una divisione dall'altra, ho numeri che da un certo punto in poi proseguono sempre con la cifra 0:

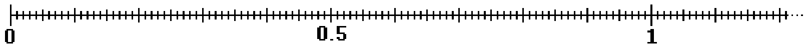


− attorno al punto 3 alla prima scansione in tacche si ha: …, 1, 2, ***3,*** 4, 5, …
− con la successiva suddivisione: …, 2.8, 2.9, ***3.0,*** 3.1, 3.2, …
− con un'ulteriore suddivisione: …, 2.98, 2.99, ***3.00,*** 3.01, 3.02, …
− poi: …, 2.998, 2.999, ***3.000,*** 3.001, 3.002, …

Comunque, sia che scriva 3, sia che scriva 3.0, 3.00, 3.000, … o 3.000… (sottintendendo una sequenza senza fine di 0), voglio identificare sempre lo stesso punto, sono da intendere come diverse rappresentazioni dello stesso numero. Analogamente 420.7, 420.70, 420.7000… sono diverse come sequenze di simboli ma sono ***uguali*** *come numeri.*

1 Metti in ordine di grandezza le seguenti misure, che supponiamo esatte: 0.53 m, 1.18 m, 1.2 m.

2 Rappresenta i numeri 0.53, 1.18 e 1.2 sulla retta dei numeri.



3 Un alunno di scuola media di fronte alla domanda se sia più lungo uno spago che misuri esattamente 2.37 m o uno che misuri esattamente 2.8 m risponde che è più lungo il secondo. Ha risposto correttamente? Se la risposta è affermativa, spiega perché, se la risposta è negativa cerca di individuare quale ragionamento errato c'è dietro alla risposta dell'alunno.

Nota Quando non si esprimono valori esatti, ma valori approssimati, con le scritture 420.7 e 420.70 o con 3.0 e 3.00 in genere si intendono informazioni differenti: 420.7 è una approssimazione con 4 cifre significative e 420.70 è un'approssimazione con 5 cifre significative, 3.0 è una approssimazione con 2 cifre significative e 3.00 è un'approssimazione con 3 cifre significative. Nel caso in cui i numeri esprimano misure in metri e si stiano considerando arrotondamenti, 420.7 indica una misura arrotondata ai decimetri (420.7 è la tacca dei decimetri più vicina) e 420.70 indica una misura arrotondata ai centimetri (420.70 è la tacca dei centimetri più vicina). Se invece fossero stati troncamenti, 420.70 avrebbe indicato un valore compreso tra 420.70 e 420.71.

Analogamente se si afferma che la popolazione di una certa città è $2.40 \cdot 10^6$ (2.40 milioni) di abitanti, si intende che essa sia arrotondata a 3 cifre, cioè che sia compresa tra 2395000 e 2405000 abitanti.

Ricordiamo che, ad esempio 4567.85 ha ordine di grandezza 3 (o delle migliaia) e 0.0149 ha ordine di grandezza −2 (o dei centesimi).

Per ***confrontare*** *due numeri* positivi occorre:

(1) in prima istanza confrontare i loro **ordini di grandezza**;
Ad es. 0.031 e 0.0079 hanno ordini di grandezza -2 e -3. Il primo è maggiore del secondo, quindi 0.031 è maggiore di 0.0079.
(2) se il passo (1) non è stato risolutivo, cioè se i numeri hanno stesso ordine di grandezza, confrontare le **cifre iniziali**;
Ad es. 35689 e 40205 hanno stesso ordine di grandezza, 3 è minore di 4, quindi il primo numero è minore del secondo.
(3) se il passo precedente non è stato risolutivo, confrontare le **cifre successive**;
Ad es. 0.46 (cioè 0.46000…) e 0.4 (cioè 0.40000…) hanno stesso ordine di grandezza -1, stessa cifra di posto -1, ma differenti cifre di posto -2: 6 è maggiore di 0 quindi il primo numero è maggiore del secondo.
(4) se il passo precedente non è stato risolutivo, procedere come in (3), e così via.

3. Numeri limitati e numeri periodici

Come si fanno le ***operazioni*** *tra numeri reali*? Voi sapete eseguire le operazioni con i ***numeri limitati***, cioè con i numeri composti da una sequenza finita di cifre o, meglio, che da un certo punto in poi hanno tutte le cifre uguali a 0. Sono i punti che corrispondono a tacche. Si procede riconducendosi ad operazioni con numeri interi. Vedi gli esempi seguenti, riferiti al calcolo di 1456.3+47.932, 12.3·0.21, 12/0.3:

```
1456.300 +              123 ×  ← 12.3 (faccio ·10)                 1.2 / 0.3 =
0047.932 =               21 =  ← 0.12  (faccio ·100)               12 / 3 = 4
--------                ----
1504.232                123
                       2460
                       ----
                       2583  → 2.583 (faccio /1000)
```

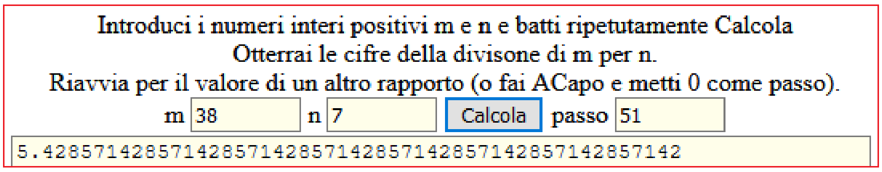
Somma, prodotto e differenza di due numeri interi sono ancora numeri interi. Quindi anche somma, prodotto e differenza di due numeri limitati sono ancora numeri limitati. Vediamo un esempio di *divisione:* 38/7.

```
unità
   38|7
  -35|5      decimi
   =3| →        30|7
               -28|4     centesimi
                =2| →        20|7
                            -14|2     millesimi
                             =6| →        60|7
                                         -56|8
                                          =4| →  ...
```

Quindi 38/7 = 5 unità + 4 decimi + 2 centesimi + 8 millesimi + … = 5.428…

4 Calcola in modo simile 23/12 e 14/700, trovando i risultati approssimati per troncamento ai millesimi.

Tutte le cifre di una divisione tra interi possono essere ottenute facilmente con lo **script** [divis](). Ecco che cosa puoi ottenere:



5 Verifica che se (nel modo ora descritto) esegui le divisioni 6/25 e 24/7 ottieni i valori descrivibili nel modo seguente, e cerca di spiegare perché ciò accade.

(3.1)	(1) scrivi "0.24"	(2) scrivi "0"	(3) vai a (2)		
(3.2)	(1) scrivi "3."	(2) scrivi "428571"	(3) vai a (2)		

Il gruppo di cifre che si ripete, cioè il gruppo di cifre stampato al passo (2), viene detto ***periodo***.

I numeri precedenti sono scritti anche nella forma: $0.24\overline{0}$ e $3.\overline{428571}$

Con la sopralineatura abbiamo indicato la ripetizione della sequenza di cifre segnate.

I numeri che da un certo posto in poi presentano un periodo, cioè una sequenza di cifre che si ripete, vengono detti ***periodici.***

Il risultato di una ***divisione tra due numeri interi*** m *e* n *è sempre un numero periodico.*

Infatti, come abbiamo visto per un caso particolare nel quesito precedente, i valori che può assumere il ***resto*** sono 0, 1, 2, …, n-1 (dividendo per 7 come resto posso ottenere 0, 1, 2, … o 6). Prima o poi ottengo un valore già ottenuto in precedenza; dopo, l'esecuzione continua ripetendosi esattamente nello stesso modo, fino a riottenere nuovamente lo stesso resto, e così via.

6 Col programma precedente ottengo che 450/29 fa:
15.517241379310344827586206896551724137931034482758 6…
Quanto è lungo il periodo di questo numero? Quanto può essere lungo al massimo il periodo di m/n? Perché?

7 I numeri con periodo 0 come possono essere chiamati?

4. Approssimazioni e operazioni tra numeri reali

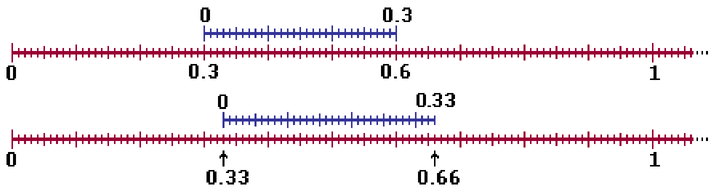
Abbiamo richiamato come si fanno le operazioni con i numeri limitati. Abbiamo visto che le divisioni tra numeri limitati possono dar luogo a numeri non limitati (ma comunque periodici). Vediamo ora come si possono eseguire le *operazioni tra numeri non limitati.* Nel seguito, per semplicità di scrittura, ***converremo*** che, a meno di indicazioni contrarie, un gruppo di cifre che si ripeta per tre volte e sia seguito da "**…**" indichi un numero che abbia questo gruppo di cifre come periodo. Ad esempio 3.4570570570… indicherà che questo numero inizia per 3.4 e poi è seguito da una ripetizione, senza fine, del gruppo di cifre 570.

8 Come calcoleresti 3.222…·4, 3.222…+3.555…, 3.222…/2 ?

In casi semplici, come quelli del quesito precedente, è facile eseguire il calcolo. Il procedimento impiegato è in accordo con il significato che le operazioni assumono quando con i numeri reali vengono rappresentate grandezze fisiche.

Vediamo ad esempio il calcolo di 0.333…+0.333…. Possiamo sommare le cifre a partire da sinistra. Calcolando 0.3+0.3 trovo la lunghezza del segmento che si ottiene concatenando due segmenti lunghi 0.3. Calcolando 0.33+0.33 trovo la lunghezza del segmento che si ottiene concatenando due segmenti lunghi 0.33. Man mano ottengo misure più precise della lunghezza del segmento che si ottiene concatenando due segmenti lunghi 0.333… (→ *figura 5*). Procedendo nel calcolo vengo a generare il numero 0.666….

figura 5

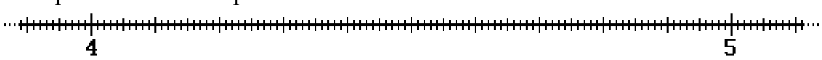


9 Quanto fanno 0.666…+0.333… e 0.333…·3? Trovi qualche contraddizione?

10 Tra due istanti possiamo sempre pensare che vi sia un istante intermedio, tra due punti della retta dei numeri possiamo sempre pensare di prendere un punto a metà strada, …. Sapresti scrivere un numero compreso tra 4.999… e 5.000…?

11 Sulla retta della seguente *figura 6* individua il punto 4.9, poi il punto 4.99, poi il punto 4.999, … Procedendo in questo modo, se potessi operare sulla retta dei numeri astratta e con strumenti in grado di tracciare punti "senza spessore", ti avvicineresti sempre più al punto 5. Che distanza da 5 ha il punto 4.999? e il punto 4.999999?

figura 6



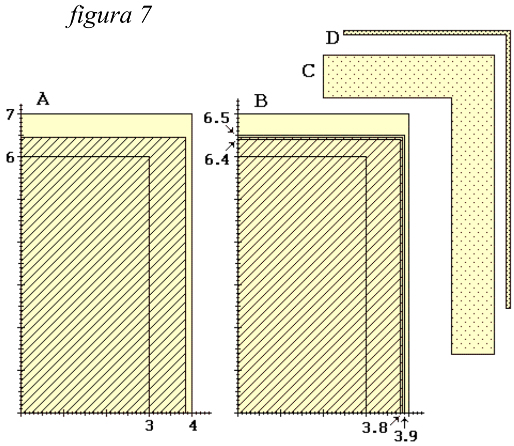
È impossibile distinguere il punto 4.999… dal punto 5, il punto 0.999… dal punto 1. Analogamente è impossibile distinguere, ad esempio, 67.2999… dal punto 67.3

Anche in questi casi dirò che sono di fronte a ***numeri uguali***. Quindi 0.999… = 1, −4.27999… = −4.28, …

12 Prova a calcolare 0.373737…+0.416416416…

Si è visto con vari esempi che si riescono a sommare i numeri periodici. Nel caso del quesito precedente sono riuscito a capire che il risultato è 0.790153790153790153…. Non è tuttavia un procedimento comodissimo. Ancora più complicato è il caso del prodotto. Se poi i numeri su cui operare non sono periodici non posso con sicurezza stabilire le cifre del risultato: nel caso di una addizione non posso prevedere se passando a sommare nuove cifre otterrei dei riporti che faranno cambiare le ultime cifre calcolate. Vi è tuttavia un modo più generale per operare con i numeri reali. Illustriamolo a partire da alcuni esempi.

figura 7



In *figura 7* è riprodotta una piastra rettangolare. Usando una riga graduata posso trovare che le misure in centimetri della base e dell'altezza sono, troncate agli interi, 3 e 6. In altre parole: 3 cm ≤ *base* ≤ 4 cm, 6 cm ≤ *altezza* ≤ 7 cm (figura **A**).

Posso concludere che l'area della piastra è compresa tra 3·6 = 18 cm^2 e 4·7 = 28 cm^2 (le aree dei rettangoli interno ed esterno).

La figura a L rovesciata più grande (figura **C**) è la differenza tra il rettangolo esterno e il rettangolo interno.

La sua area è la *differenza tra la approssimazione per eccesso* (28 cm^2) *e quella per difetto* (18 cm^2).

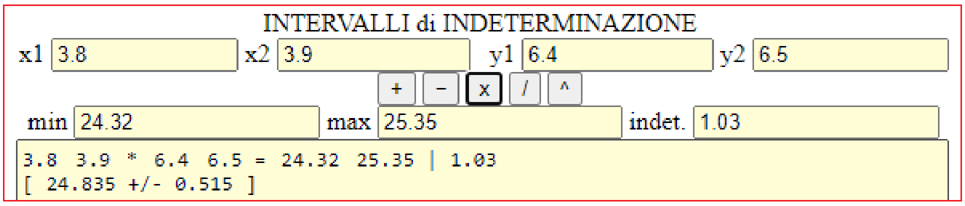
Questa differenza viene chiamata ***indeterminazione*** (o incertezza). Dunque:

$$18\,\mathrm{cm}^2 \le area \le 28\,\mathrm{cm}^2 \qquad indeterminazione = 10\,\mathrm{cm}^2$$

13 Che cosa posso concludere se considero le tacche dei millimetri (→ figure **B** e **D**)?

... cm^2 ≤ *area* ≤ ... cm^2 *indeterminazione* = ... cm^2

Lo script a cui puoi accedere da **Indet** automatizza il calcolo della approssimazione con cui si può conoscere il risultato di una operazione effettuata su dati approssimati, cioè automatizza il calcolo dell'intervallo di indeterminazione del risultato di un'operazione tra dati di cui sono noti gli intervalli di indeterminazione. Sotto è visualizzato che cosa di può ottenere per i casi considerati sopra:



Come illustra il seguente esempio *migliorando la precisione dei termini dell'operazione si può migliorare quanto si vuole la precisione del risultato*:
calcolo di *x/y* con x = √10 = 3.162277660168… e y = √2 = 1.414213562373… utilizzando i troncamenti di *x* e di *y* a cifre di posto man mano più piccolo [ricorda che dire che 3.1 è un troncamento ai decimi equivale a dire che il valore esatto è compreso tra 3.1 e 3.2]:

```
3.1  3.2 / 1.4  1.5 = 2.0666666666667  2.2857142857143 | 0.2190476190476
[ 2.1761904761905 +/- 0.1095238095238 ]

3.16  3.17 / 1.41  1.42 = 2.2253521126761  2.2482269503546 | 0.0228748376785
[ 2.23678953151535 +/- 0.01143741883925 ]

3.162  3.163 / 1.414  1.415 = 2.234628975265  2.2369165487977 | 0.0022875735327
[ 2.23577276203135 +/- 0.00114378676635 ]
```

Come si può osservare, man mano che divido per 10 l'indeterminazione di *x* e di *y* (all'inizio è 0.1, poi è 0.01, …) ottengo il risultato con un'indeterminazione che man mano si divide circa per 10 (0.2190, 0.02287, …). Analogamente la *precisione* [➔ La matematica e i suoi modelli 1] si divide per dieci (0.1095, 0.01144, …).

5. I numeri razionali

Abbiamo visto come possono essere calcolate le operazioni tra numeri reali. In molti casi si possono utilizzare *proprietà che permettono di semplificare il calcolo.* Vediamo prima alcuni esempi di semplificazione di calcoli su dati "esatti".

- Devo calcolare $5^3 \cdot 2^3$. Posso procedere così: (*a*) $5^3 \cdot 2^3 = 125 \cdot 8 = 1000$
  oppure così: (*b*) $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$
- Devo calcolare $24^2/6^2$. Posso procedere così: (*a*) $24^2/6^2 = 576/36 = 16$
  oppure così: (*b*) $24^2/6^2 = (24/6)^2 = 4^2 = 16$

I procedimenti (*b*) sono esempi di applicazione della regola di riscrittura come le seguenti:

(5.1) $\boxed{\mathbf{a^c \cdot b^c \to (a \cdot b)^c}}$ **(5.2)** $\boxed{\mathbf{a^c / b^c \to (a / b)^c}}$

(5.3) $\boxed{\mathbf{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \to \sqrt{(a \cdot b)}}}$ **(5.4)** $\boxed{\mathbf{\sqrt{a} / \sqrt{b} \to \ \dots}}$

14 Completa (5.4).

Torniamo all'esempio alla fine del paragrafo precedente. Per effettuare questo calcolo possiamo prima impiegare la proprietà (5.4)

$$\sqrt{10} / \sqrt{2} = \sqrt{(10/2)} = \sqrt{5}.$$

quindi possiamo ricondurci al calcolo della radice quadrata di 5.

Vediamo qualche altro esempio di semplificazione di procedimenti di calcolo (prova anche a riscriverli scrivendo le frazioni "a due piani", usando "—" invece di "/"):

(1) (4/3)·(9/2) = (4·9)/(3·2) = 36/6 = 6

(2) $(7/2)/(5/4) = (7/2)\cdot(4/5) = (7\cdot4)/(2\cdot5) = 28/10 = 2.8$
(3) $(7/3)+(2/3) = (7+2)/3 = 9/3 = 3$
(4) $(7/3)+(5/2) = (7\cdot2)/(3\cdot2) + (5\cdot3)/(2\cdot3) = 14/6 + 15/6 = (14+15)/6 = 29/6 = 4.8333\ldots$

Si sono impiegate le riscritture:

(5.5) $\boxed{(a/b)\cdot(c/d) \to (a\cdot c)/(b\cdot d)}$ **(5.6)** $\boxed{(a/b)/(c/d) \to (a/b)\cdot(d/c)}$

(5.7) $\boxed{(a/b)+(c/b) \to (a+c)/b}$ **(5.8)** $\boxed{a/b \to (a\cdot c)/(b\cdot c)}$

Nota. Nell'utilizzare queste regole di riscrittura occorre prestare qualche attenzione. Ad es. non posso trasformare $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$ in $\sqrt{(-2\cdot-3)}$, cioè in $\sqrt{6}$, in quanto $\sqrt{-2}$ e $\sqrt{-3}$ sono termini indefiniti.

Non è detto che usando (5.5)-(5.8) si renda effettivamente più semplice il calcolo. Ad esempio nel caso (4) probabilmente il procedimento seguente è più comodo: $(7/3)+(5/2) = 2.333\ldots+2.5 = 4.8333\ldots$

Comunque questi esempi mettono in luce che le "quattro operazioni" applicate a numeri reali che possono essere espressi nella forma m/n (con m e n numeri interi) danno luogo a risultati che possono essere espressi nella forma m/n.

Ciò è spesso molto vantaggioso.

Ad es. se devo calcolare $2.666\ldots \cdot 0.111\ldots$ posso ricordare che il primo termine è il risultato di 8/3 e che il secondo è il risultato di 1/9 e, usando (5.5), ottenere$(8\cdot1)/(3\cdot9) = 8/27$.

Se voglio calcolo 8/27, se no lo lascio così: usando l'algoritmo della divisione posso, poi, in un qualunque momento, calcolare facilmente il valore di 8/27 con la precisione che voglio. Oltre tutto, se poi dovessi effettuare altri calcoli con questo numero, la sua rappresentazione come 8/27 potrebbe facilitarmi i procedimenti. Ad es. se dovessi poi effettuare una moltiplicazione per 6 potrei fare così: $8/27\cdot6 = 48/27$ e, volendo, lasciare nella forma m/n anche questo risultato; oppure, usando la "semplificazione di frazioni", fare: $8/27\cdot6 = (8\cdot6)/27 = (8\cdot2\cdot3)/(9\cdot3) = (8\cdot2)/9 = 16/9$.

I numeri che possono essere espressi come rapporto tra due numeri interi, cioè nella forma m/n (con m e n numeri interi e, naturalmente, $n\neq0$), vengono detti ***numeri razionali***.

Il nome deriva dal fatto che in Latino i calcoli, e in particolare i rapporti, venivano chiamati *rationes*. In italiano è sopravvissuta la parola *razione* con il significato di *porzione calcolata* (es.: razione di viveri che spetta ad un soldato, razione giornaliera di latte da dare a un neonato, …). Deriva dal Latino (dal verbo *frangere*, che significa *spezzare* - pensa all'italiano "infrangibile") anche la parola *frazione*, che significa *parte* e che, come sai, in matematica è usata per indicare un modo particolare di esprimere i rapporti: m/n come frazione viene letto «m n-esimi».

Abbiamo già visto che tutti i numeri razionali sono periodici: il risultato di una divisione tra interi presenta sempre un periodo. Viceversa è possibile trasformare ogni numero periodico nella forma m/n.

Ad esempio con lo script **divis** posso verificare facilmente che ogni numero del tipo 0.ABCDABCDABCD… è il risultato di ABCD/9999, e così via per ogni gruppo N di cifre con N minore o maggiore di 4. Cose analoghe accadono se si sposta il "punto decimale" a destra o a sinistra.

```
4/9
0.4444444444444444444444444...
375/999
0.3753753753753753753753753...
123456789/999999999
0.1234567891234567891234567 89...
1234/999900
0.0012341234123412341234 1234...
123400/9999
12.3412341234123412341234...
```

Abbiamo anche, per es., 3.444… = 3+4/9 = 3*9/9+4/9 = (3*9+4)/9 = 31/9 (posso verificare anche con lo script che 31/9 = 3.444…). Si può quindi concludere che:

*l'insieme dei **numeri razionali** coincide con l'insieme dei **numeri periodici**.*

Da (5.7) e (5.8) si può derivare: **(5.9)** $\boxed{(a/b)+(c/d) \to (a\cdot d+c\cdot b)/(b\cdot c)}$

che mette in luce che la somma di due numeri razionali è ancora un numero razionale.

Possiamo concludere che applicando le "quattro operazioni" a numeri razionali si ottengono ancora numeri razionali. Questo fatto può essere espresso dicendo che l'insieme dei numeri razionali (ovvero, l'insieme dei numeri periodici) è ***chiuso*** rispetto alle "quattro operazioni". Questa terminologia vuol ricordare il fatto che se sono nell'insieme dei numeri razionali e applico le quattro operazioni non "esco" da tale insieme.

L'insieme dei numeri limitati invece non è chiuso rispetto alla divisione: 10/3 fa 3.333…, che non è limitato.

Sembrerebbe che restando all'interno dei numeri razionali (indicati in genere con **Q**: l'uso di "q" deriva dal fatto che essi sono rappresentabili come quozienti esatti di numeri interi) si possano fare tutti i calcoli che si possono fare con i numeri reali (**R**). In realtà non è così. Ad esempio si può dimostrare che la radice quadrata di 2, quella di 3, quella di 5 e quelle di moltissimi altri numeri (anzi, le radici quadrate di una quantità infinita di numeri positivi) non sono numeri razionali. In altre parole l'insieme dei numeri razionali positivi non è chiuso rispetto all'operazione di estrazione della radice quadrata.

I numeri non razionali vengono detti ***irrazionali***.

Osserviamo che in questo caso si fa un uso dell'aggettivo *irrazionale* del tutto diverso da quello fatto nel linguaggio comune, in cui viene impiegato per indicare fenomeni di cui non si riescono a spiegare i motivi, che avvengono in modo caotico, e atteggiamenti non meditati, non "calcolati" (anche questo uso deriva dal Latino: con *rationes* oltre ai calcoli in senso stretto venivano indicati i calcoli nel senso di "ragionamenti, meditazioni elaborate, …"; in italiano usiamo: "comportamento razionale", "razionalmente", …)..

Infatti non è detto che un numero irrazionale si sviluppi in modo caotico, non spiegabile secondo un qualche schema. Si pensi ad esempio a:

0.50500500050000500000050… che posso generare scrivendo un "5" separato da un numero man mano incrementato di uno di "0"; esso non si sviluppa in modo "irrazionale" in quanto le sue cifre si susseguono secondo uno schema fissato.

15 Apri questo **script**. Esso genera un numero razionale o irrazionale?

6. Esercizi

e1 Un'aiuola ha forma triangolare. Sapendo che le misure della base e dell'altezza sono rispettivamente 255±5 cm e 185±5 cm, che cosa puoi concludere sul valore dell'area dell'aiuola?

e2 Una scatola metallica di forma cubica ha lo spigolo di 21.5±0.1 cm. Che cosa puoi concludere sul valore del suo volume?

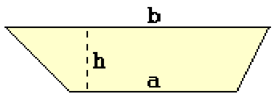
e3 Una ruota ha diametro di 453±1 mm. Sapendo che $3.141 \le \pi \le 3.142$ (e non conoscendo altre cifre di π), che cosa puoi concludere sulla lunghezza della circonferenza della ruota?

e4 Il 37% degli abitanti con almeno 40 anni di un certo comune ha la licenza media.
(a) Sapendo che gli abitanti con almeno 40 anni del comune sono 31572, quanti sono quelli con la licenza media? [poiché la percentuale è arrotondata, cioè cade tra 36.5 e 37.5, non potrai trovare un valore esatto, ma un intervallo di indeterminazione]
(b) Qual è l'arrotondamento alle migliaia di questa parte di popolazione?

e5 So che una pila di 250 fogli dello stesso tipo pesa 860±5 grammi ed è alta 2.4±0.1 cm. Individua, con la miglior precisione possibile, il peso medio e lo spessore medio di un foglio.

e6 Ho un disegno e una sua riduzione realizzata con una fotocopiatrice che può riprodurre copie con le scale: 50%, 51%, 52%, …, 149%, 150%. La distanza tra due punti del disegno originale è di 17 mm, quella tra i corrispondenti punti nella fotocopia è di 12 mm. Sapendo che le misure sono troncate ai millimetri (cioè, ad es., che la prima misura cade tra 17 e 18 mm) puoi individuare esattamente la scala di riproduzione utilizzata o puoi delimitarla (cioè: la scala al massimo è … e al minimo è …)?

e7 Una lamiera a forma di trapezio ha dimensioni in *mm* (vedi figura): $a = 240 \pm 1$, $b = 357 \pm 1$, $h = 114 \pm 1$. Trovane l'area. [trova l'intervallo di indeterminazione per $a+b$, poi per $(a+b)\cdot h$, e quindi per $(a+b)\cdot h/2$.



e8 So che 1000 cm^3 (= 1 litro) d'olio pesa 930±10 g, cioè che il suo peso in grammi ha come intervallo di indeterminazione [920,940]. Qual è il volume di 1000 g (= 1 kg) di olio?

Traccia. Se il peso fosse esattamente 920g avrei, indicando con V il volume in cm^3 e con P il peso in grammi: V/P = 1000/920, da cui, esprimendo V in funzione di P, V = 1000/920·P; se P = 1000 ho V = 1086.956… Analogamente, se il peso fosse esattamente 940 grammi avrei …

e9 Su un giornale leggo «il tasso annuo di guasto degli apparecchi telefonici della ditta X è 16%, cioè un apparecchio ha mediamente 0.16 guasti all'anno; questo vuol dire che l'apparecchio ha problemi mediamente ogni 6.25 anni». È corretta questa conclusione? [Segui la traccia indicata]

Traccia. nº guasti per anno = (nº guasti)/(nº anni) = 0.16
nº anni per guasto = (nº anni)/(nº guasti) = 1/(nº guasti per anno) = 1/0.16 = 6.25
ma 16% è un arrotondamento, per cui: 0.155 ≤ n° guasti per anno ≤ 0.165 → … ≤ 1/(nº guasti per anno) ≤ …
Quindi la conclusione corretta potrebbe essere che …

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
retta dei numeri (§2), *numeri uguali* (§2, §4), *numeri limitati* (§3), *numeri periodici* (§3), *indeterminazione* (§4), *numeri razionali* (§5), *chiuso rispetto a …* (§5), *numeri irrazionali* (§5).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: piccola CT grande CT isto isto con % boxplot striscia 100 60 ordina Grafici Perc divisori Indet divis